ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 34.2 (2016): 129-150
Investigaciones didácticas
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1950
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio base de vectores

Mental structures for modeling the learning of the change of basis theorem for vectors

Marcela Parraguez
Pontificia Universidad Católica del Valparaíso, Chile
marcela.parraguez@pucv.cl

Javier Lezama
Instituto Politécnico Nacional, México
jlezamaipn@gmail.com

Raúl Jiménez
Universidad Católica del Norte, Chile
rjimen@ucn.cl

RESUMEN • Basados en la teoría APOE como marco teórico y metodológico, investigamos, desde una postura cognitiva, las estructuras mentales necesarias para construir el teorema para el cambio de base de vectores (TCBV). Con el propósito de analizar la forma en que estudiantes universitarios lo aprenden, se diseñó una descomposición genética (DG) para el teorema. Mediante tres casos de estudio se muestra cómo estudiantes de esos casos construyen el concepto de coordenadas de un vector, pero tienen dificultades para utilizarlo en la construcción de la matriz de coordenadas de vectores. Esta dificultad está vinculada a que no han coordinado los procesos involucrados en términos del cuantificador. Específicamente, se muestran las dificultades en la construcción del TCBV como objeto y el papel determinante que desempeña el concepto de combinaciones lineales en el TCBV.

PALABRAS CLAVE: cambio de base; coordenadas vectoriales; teoría APOE; aprendizaje.

ABSTRACT • Drawing on APOS Theory as our theoretical and methodological framework, we investigate under a cognitive approach the mental structures necessary to build the vector base change theorem (CBVT). In order to analyse the way in which college students learn it, a genetic decomposition (DG) for the theorem was designed. Through three case studies, it is shown how individual students build the concept of coordinates of a vector, but also have difficulties to use it in the construction of the vector coordinates matrix. This difficulty is linked to the fact that they have not coordinated the processes involved in terms of the quantifier. Specifically, we point to difficulties in building the CBVT as an object and in establishing the determining role of the concept of linear combinations in the CBVT.

KEYWORDS: change of basis; vector coordinates; APOS theory; learning.

Recepción: octubre 2015 • Aceptación: abril 2016 • Publicación: junio 2016

Parraguez, M., Lezama, J., Jiménez, R., (2016) Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio base de vectores. *Enseñanza de las Ciencias*, 34.2, pp. 129-150

ANTECEDENTES

Los procesos de enseñanza y aprendizaje en álgebra lineal, para estudiantes de física, ingeniería, matemáticas, pedagogía en ciencias y química, precisan de elementos de las teorías de espacios vectoriales, de coordenadas y de transformaciones lineales. Para investigadores como Robinet (1986), Harel (1989*a*), Dorier (1990), Moore (1995), Sierpinska (2000), Weller y otros (2002) y Maracci (2008), existe consenso en que es difícil alcanzar los objetivos de enseñanza y aprendizaje propuestos para los cursos de álgebra lineal. Dorier y Sierpinska (2001) sitúan el problema central en que el estudiante tiene que trabajar con conceptos matemáticos de naturaleza general, pero tratados con elementos particulares, además de aprender a escribir demostraciones que no le son explicativas; al no entender su naturaleza general, el estudiante se inclina por procedimientos calculatorios que sabe manejar, pero no siempre entiende (Robinet, 1986; Moore, 1995). Los conceptos de espacio vectorial y de transformación lineal representan un obstáculo mayor; en concreto, el concepto de coordenada resulta engañoso, debido a la cercanía de la noción ingenua *como ubicación*, que contrasta con el escaso buen éxito que se percibe en su uso en situaciones específicas (Harel, 1989*b*; Weller y otros, 2002; Maracci, 2008). Por ejemplo, las coordenadas de cualquier vector en la base canónica del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ corresponden directamente a las componentes vectoriales, dejando implícita la combinación lineal involucrada.

Montiel y Batthi (2010) abordan la problemática de enseñanza de los conceptos de la matriz cambio de base y la representación matricial de las transformaciones lineales centrando su atención en el papel de problemáticas semánticas y gestuales en la interacción en el aula. Bagley, Rasmussen y Zandieh (2012) investigan la relación conceptual que los estudiantes establecen entre las matrices y las funciones lineales, y determinan que algunos estudiantes concilian ambos conceptos y son capaces de trabajar con matrices sin dificultades. Por el contrario, los estudiantes que no articulan el concepto de función con el de matriz tienen dificultades, pues no alcanzan a entender la relevancia de transformar la función en una matriz.

Con la finalidad de indagar en las problemáticas didácticas del álgebra lineal, nos propusimos investigar desde una postura cognitiva los procesos de aprendizaje en el teorema de cambio de base para vectores (TCBV en adelante). Dicho teorema establece que dadas dos bases $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ y $\beta' = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ de un espacio vectorial finito dimensional, digamos *V* de dimensión *n*, existe una matriz $A \in M_n$, la cual llamaremos matriz cambio de base, que cumple con $A[v]_\beta = [v]_{\beta'}$ para cualquier *v* en *V* (Poole, 2006: 483).

El TCBV permite identificar y construir distintas coordenadas a través de las matrices cambio de bases específicas de espacios vectoriales dados. La construcción de esas coordenadas corresponde a la aplicación de los conceptos básicos para el álgebra lineal, como son el de combinación lineal y el de dimensión. El TCBV hace uso del concepto de coordenadas de vectores, el cual se relaciona con el concepto de transformación lineal identidad, y se generaliza en el teorema de la matriz asociada a una transformación lineal.

FUNDAMENTACIÓN DE LA TEORÍA APOE

La teoría APOE (acrónimo de las construcciones mentales acciones, procesos, objetos y esquemas), desarrollada por Dubinsky y el grupo de investigación RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) es una teoría reconocida en la comunidad de investigación en didáctica de la matemática (Dubinsky, 1991; Arnon y otros, 2014). En ella se toma como punto de partida el mecanismo de abstracción reflexiva propuesto por Piaget para describir la construcción de objetos mentales relacionados con objetos matemáticos específicos. La abstracción reflexiva se pone de manifiesto en la teoría a través de distintos mecanismos mentales: interiorización, coordinación, generalización, encapsulación y reversión, como se explica a continuación.

Consideremos un concepto matemático. Un estudiante muestra una construcción *acción* de dicho concepto si las transformaciones (actividad mental reflejada en argumentos observables) que hace sobre el concepto se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son principalmente externos, en el sentido de que cada paso de la transformación requiere realizarse de forma explícita y guiados por instrucciones externas que le entregan indicaciones precisas sobre qué debe hacer. Aunque las *acciones* son las más primarias de las construcciones mentales, estas son importantes y necesarias para el desarrollo de otras construcciones. Cuando las *acciones* se repiten y el estudiante reflexiona sobre ellas y deja de depender de las instrucciones externas adquiriendo control interno sobre lo que hace (o imagina), decimos que el estudiante ha *interiorizado* la *acción* en un *proceso*. La construcción mental *proceso* se caracteriza por que el estudiante ha alcanzado la capacidad para imaginar la ejecución de los pasos que debe seguir en una actividad matemática, sin tener necesariamente que llevar a cabo cada uno de ellos explícitamente, pudiendo incluso prescindir de alguno; más aún, el estudiante realiza transformaciones a un objeto matemático en la mente, sin la necesidad de ir a través de cada paso. Por otra parte, dos o más procesos pueden *coordinarse* para construir un nuevo proceso y además dicho proceso puede *revertirse* o *generalizarse*. Si el estudiante estabiliza el dinamismo propio de un *proceso* en un estado sobre el cual puede aplicar *acciones* sin que este se derrumbe, y se logre entender el *proceso* como un todo ligado –de modo que él mismo puede construir transformaciones sobre el objeto matemático–, entonces se dice que ha *encapsulado* el *proceso* en un *objeto* cognitivo. Además, si se necesita volver desde el objeto al *proceso* que le dio origen, se dice que ha *desencapsulado* el objeto en un *proceso* (las dificultades del estudiante con el simbolismo matemático provienen de tratar de realizar acciones sobre procesos que no han sido encapsulados). Un *esquema* de un concepto matemático es una colección de *acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas* de otros conceptos, relacionados en la mente del estudiante como una estructura cognitiva coherente. La coherencia es entendida como la capacidad del estudiante para reconocer relaciones en el interior del *esquema* y establecer si este permite solucionar una situación matemática particular y usarlo en tal caso. Al tratar un problema matemático, el estudiante evoca un *esquema* y lo desenvuelve (destematizar) para tener acceso a sus componentes, utiliza relaciones sobre ellas y trabaja con el conjunto. Un *esquema* está siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo *objeto* al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso se dice que el esquema se ha *tematizado* en un *objeto*.

Para operacionalizar la teoría como marco de investigación se requiere el diseño de un modelo predictivo, llamado descomposición genética (DG), para explicar fenómenos relacionados con el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Este modelo hipotético DG describe en detalle las construcciones y los mecanismos mentales que son necesarios para que un estudiante aprenda un concepto matemático (Arnon y otros, 2014). En el caso de esta investigación, interesa el diseño de una DG que describa la construcción del conocimiento incluido en el TCBV, en el contexto de un concepto del álgebra lineal.

DISEÑO Y DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA

La teoría APOE proporciona un ciclo de investigación compuesto por tres componentes: el análisis teórico, el diseño y la aplicación de instrumentos, y el análisis y la verificación de datos. Este ciclo ha sido utilizado con éxito por el Grupo RUMEC y otros (Dubinsky y Lewin, 1986; Dubinsky, 1991; Asiala y otros, 1996; Brown y otros, 1997; Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Dubinsky y Yiparaki, 2000; Mc Donald, Mathews y Strobel, 2000; Trigueros y Oktaç, 2005; Roa y Oktaç, 2010; Trigueros y Martínez-Planell, 2010). Este ciclo de investigación determinado por esas tres componentes permite obtener una descripción detallada de las estructuras mentales que muestran los estudiantes.

El análisis teórico es la primera componente del ciclo; consiste en el estudio profundo de los conceptos matemáticos inmersos en el TCBV para determinar las construcciones mentales necesarias en el aprendizaje del teorema, mediante una descripción hipotética de las construcciones mentales del aprendiz. Esto es lo que llamamos una DG hipotética, que en esta investigación es una modelación epistemológica y cognitiva del teorema tomado.

Una vez definida la DG teórica es necesario validarla, es decir, tener alguna certeza del modelo de construcción del TCBV señalado en ella. Para esto se diseñaron y aplicaron instrumentos (un cuestionario de ocho preguntas y tres entrevistas semiestructuradas) que permitieron identificar las construcciones mencionadas en la DG hipotética, de modo que se reflejen explícitamente las construcciones mediante las cuales los estudiantes pueden aprehender (construir cognitivamente) el TCBV.

Se trabajó con diez estudiantes de tres universidades, de las carreras de Pregrado en Matemáticas y Pedagogía en Matemáticas. La selección de los estudiantes en estas tres universidades trabajadas como *casos* –indagación en profundidad de una realidad– (Stake, 2010), se vinculan con los siguientes aspectos: 1) heterogeneidad de los estudiantes que pertenecen al conjunto; 2) existencia en su malla curricular de las asignaturas de álgebra y álgebra lineal; 3) rendimiento óptimo en el curso álgebra lineal; 4) reprobación nula en las asignaturas de álgebra básica; 5) estudiantes voluntarios; 6) accesibilidad de los investigadores. La tabla 1 resume la información y la forma de etiquetar a los estudiantes de los casos.

Tabla 1.
Resumen de la recogida de información por casos de estudio

Estudiantes	Caso 1 4 estudiantes de la universidad 1 E1, E2, E3, E4	Caso 2 3 estudiantes de la universidad 2 E5, E6, E7	Caso 3 3 estudiantes de la universidad 3 E8, E9, E10
Instrumentos	Cuestionario (E1, E2, E3 y E4) Entrevista (E2)	Cuestionario (E5, E6, y E7) Entrevista (E5)	Cuestionario (E8, E9, y E10) Entrevista (E8)

Fuente: proyecto Fondecyt 1140801.

La componente de análisis y verificación de datos lleva al análisis de los datos empíricos conseguidos en la segunda etapa. Los datos obtenidos con la aplicación de los instrumentos, cuestionarios y entrevistas semiestructuradas, son analizados desde la DG teórica detectando qué elementos no han sido considerados o cuáles de las construcciones dadas hipotéticamente no se perciben. En general el análisis tiene que ser dado con nitidez, es decir, a través de ejemplos de estudiantes que parecen comprender el TCBV y otros que no, a fin de luego discutir si la diferencia radica en la presencia o falta de una construcción mental en particular que aparece en la DG hipotética. Solamente entonces se puede llegar a concluir que los datos soportan esta construcción mental particular propuesta en la DG.

Insertamos los casos de estudio dentro del ciclo de investigación de la teoría APOE para situar las características de los estudiantes participantes. Para cada caso se siguió el siguiente método: análisis teórico, aplicación de instrumentos (cuestionario y entrevistas) y, finalmente, análisis y verificación de datos.

Descomposición genética TCBV

Se describe un camino cognitivo que propone generar en un estudiante universitario la construcción del TCBV. En Arnon y otros (2014) se plantea que la evolución de las estructuras cognitivas en un plano superior se logra por la experiencia del estudiante con nuevos problemas; nosotros postulamos que dicha evolución puede generarse también en un escenario de construcción de un teorema, mostrando cómo los estudiantes evidencian construcciones y relaciones entre los elementos previos (pertenencia de un vector a un espacio vectorial, base ordenada y vector de coordenadas en su representación como matriz) que deben formarse para que el TCBV sea construido, así como otras relaciones que antes eran imperceptibles.

Descripción de las estructuras previas para la construcción del TCBV

Analizamos en detalle –en algunos casos mediante descripciones hipotéticas– la construcción de las estructuras mentales previas al TCBV. La construcción del TCBV se inicia con el establecimiento de estructuras previas que forman parte del objeto espacio vectorial. De acuerdo con la DG en Parraguez y Oktaç (2010), la construcción objeto del concepto espacio vectorial se sustenta fundamentalmente por la relación de tres esquemas: conjunto, operación binaria y axioma; a través de la coordinación de los procesos que se derivan del objeto suma de vectores y del objeto multiplicación por escalar, mediante la coordinación de los procesos involucrados en la leyes distributivas y los axiomas que van ligando ambas operaciones (suma de vectores y producto de un escalar por un vector). De estas construcciones emerge un nuevo objeto que puede ser llamado espacio vectorial.

Construcción proceso de pertenencia de un vector a un espacio vectorial

Esta construcción se obtiene de la interiorización de la acción de pertenencia del vector como elemento de un espacio vectorial. Acciones que son iniciadas por un estudiante universitario con base en ejemplos de espacios vectoriales que se describen mediante n-uplas (subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$), a través de las cuales se puede verificar si un vector pertenece al espacio vectorial propuesto. Una forma de provocar la interiorización de estas acciones es mediante la variación de los espacios vectoriales, esto es, realizar las mismas acciones con subespacios vectoriales diferentes a los de $\mathbb{R}^n$; esta variación puede llevar al estudiante a considerar la condición de pertenencia de un vector al espacio vectorial en términos más explícitos a través de un sistema de ecuaciones lineales, una combinación lineal u otra expresión.

Construcción proceso de base ordenada

Para construir el concepto de base de un espacio vectorial como proceso, el estudiante necesita evidenciar la acción de la escritura de cualquier vector del espacio de manera única y en términos de unos pocos vectores (los de la base). Ambas acciones se interiorizan mediante la combinación lineal de vectores para dar lugar al proceso de base de un espacio vectorial. Ahora, la categoría de proceso base y ordenada se alcanza cuando el proceso de base de un espacio vectorial se coordina con los números naturales para asignar a cada vector de la base una posición (orden) dentro del conjunto.

Construcción objeto del vector de coordenadas

En la construcción de este concepto (ver figura 1) entran en juego dos procesos: un proceso de base ordenada $\beta = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ de un espacio vectorial (supongamos una base ordenada $\beta = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$

del espacio vectorial *V*) y otro proceso de vector como elemento de un espacio vectorial (digamos $v \in V$), los cuales se coordinan mediante la combinación lineal de vectores, y se obtiene como producto el proceso de escribir *v* como combinación de los vectores de β, esto es $v = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots c_nu_n$.

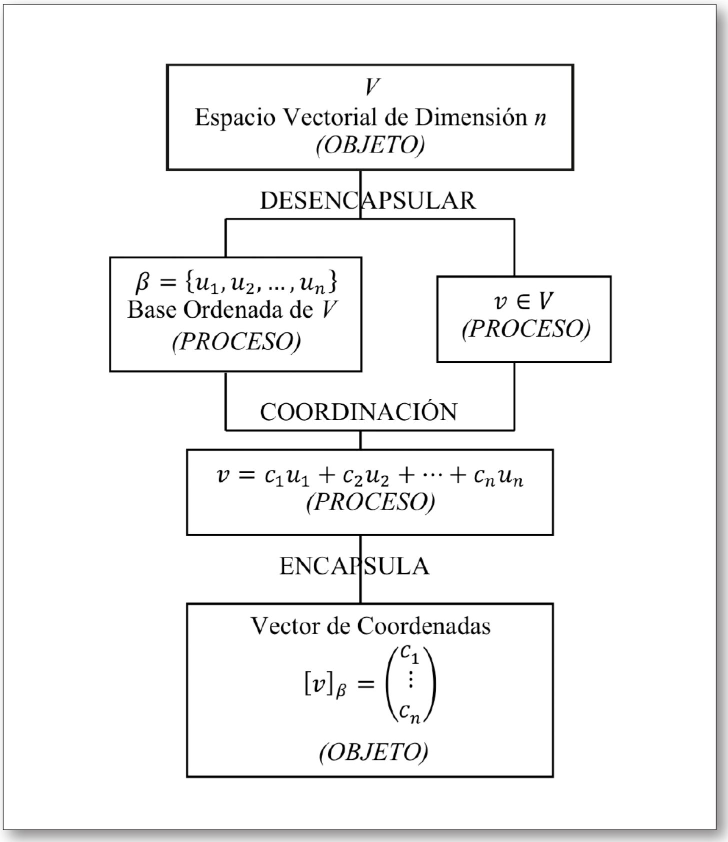

Fig. 1. Estructuras mentales que se explicitan en la construcción *objeto del vector de coordenadas*.

Así, el vector *v* es construido de forma dinámica como un proceso en términos de los vectores de la base β, donde los escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ lo definen de manera única. Realizar acciones sobre un vector $v \in V$ al definirlo en términos de los vectores de diferentes bases de *V* permitirá al estudiante interiorizar dichas acciones en un proceso. Esta construcción se caracteriza por que el vector *v* es presentado como un elemento dependiente de los vectores de una base de *V*, que a su vez determinan únicos escalares de la combinación lineal; de tal manera que el vector *v* ahora es representado como un vector de coordenadas $[v]_\beta$, definido como $[v]_\beta = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Una vez que el estudiante logra la construcción de coordenadas como un proceso, es necesario encapsularla en un objeto; esta encapsulación puede generarse al trabajar sobre espacios vectoriales diferentes a $\mathbb{R}^n$, de tal manera que se comprenda la importancia de tener cualquier vector (un polinomio, una matriz) de un espacio vectorial de dimensión finita, como un vector coordenado. La construcción objeto del vector de coordenadas se caracteriza por la construcción del isomorfismo entre cualquier espacio de dimensión finita *n* con $\mathbb{R}^n$.

Construcción del TCBV como objeto

Para que un estudiante llegue a construir el TCBV como objeto, es necesario la generalización de dos procesos (ver figura 2).

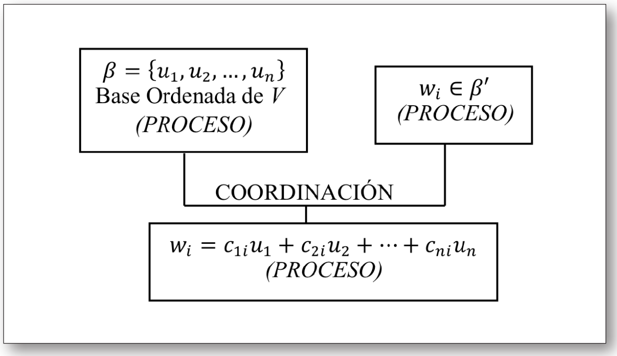

Fig. 2. Generalización del *proceso vector de coordenadas* hacia la matriz de coordenadas.

Consideremos $\beta' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ otra base ordenada del espacio vectorial V como construcción mental proceso, en la cual se precisa escribir cada vector de ella en combinación lineal de los vectores de la base β, lo cual equivale a una generalización finita del proceso de la figura 2. Este proceso se coordina con el de matriz para obtener un ordenamiento de los escalares de la combinación lineal, cuya resultante es un proceso que llamaremos Proceso (I):

$$[w_1]_\beta = \begin{pmatrix} C_{1i} \\ \vdots \\ C_{ni} \end{pmatrix}, \forall i = 1, \ldots, n$$

y que se identifica con la matriz de coordenadas: $A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [w_1]_\beta & [w_1]_\beta & \cdots & [w_n]_\beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$

$$\boxed{\begin{array}{c} v = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n \\ \textit{(PROCESO)} \end{array}}$$

Fig. 3. *Proceso coordenada* de un vector en una base ordenada.

De igual manera, podemos generalizar el proceso de la figura 3 (generalización dada por el cuantificador que determina que el proceso se repetirá en todos los vectores de la base β); esto es la combinación lineal finita del vector v en la base β, expresando cada uno de los vectores de β como combinación lineal de los vectores de β', es decir:

$$\begin{gathered} u_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{n1}w_n \\ u_2 = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{n2}w_n \\ \ldots \\ u_2 = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{nn}w_n \end{gathered}$$

que al reemplazarlos en $v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n$ y agrupándolos se obtiene:

$$v = \left(c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + \ldots + c_n a_{1n}\right) w_1 + \left(c_1 a_{21} + c_2 a_{22} + \ldots + c_n a_{2n}\right) w_2 + \ldots + \left(c_1 a_{n1} + c_2 a_{n2} + \ldots + c_n a_{nn}\right) w_n$$

Este proceso se coordina con el de matriz para obtener un ordenamiento de los escalares de la combinación lineal, cuya resultante es un proceso que llamaremos Proceso (II), generalización del proceso finito mostrado en la figura 3.

A continuación, ambos procesos, el Proceso (I) y el Proceso (II), se coordinan a través de la igualdad de matrices como en la figura 4, el cual se encapsula en el TCBV como objeto, al rotularlo como $[v]_{\beta'} = A[v]_{\beta}$.

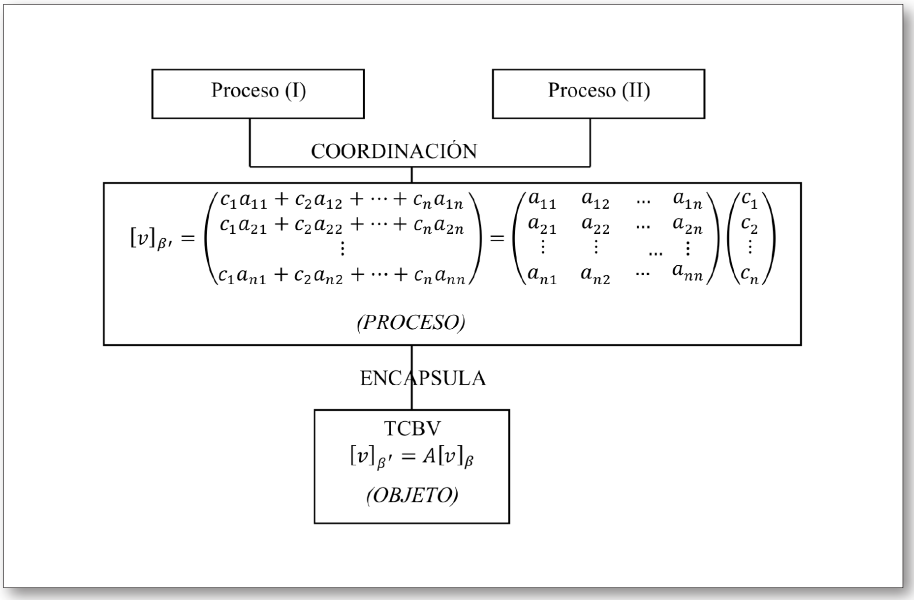

Fig. 4. Coordinación de dos procesos generalizados que originan el *TCBV como objeto*.

A través de la acción de comparación entre los objetos $[v]_{\beta'}$ y $A[v]_{\beta}$ es posible determinar la igualdad entre ellos: $[v]_{\beta'} = A[v]_{\beta}$. Estas acciones se interiorizan en un proceso que se coordina con el proceso de función, en un nuevo proceso que permite considerar esta igualdad como el resultado de la aplicación de una función:

$$[\ ]_{\beta'} : V \rightarrow R^n$$
$$v \rightarrow [v]_{\beta'} = \mathrm{A}[v]_{\beta}$$

Esto viene a ser la construcción mental proceso TCBV, que se encapsula en el objeto TCBV. Como se puede apreciar, los elementos que entran en juego en la DG descrita son complejos y el aprendizaje del TCBV como objeto en realidad depende de las relaciones que un aprendiz pueda establecer.

PREGUNTAS Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Los antecedentes descritos hasta ahora dan pie a profundizar los estudios en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de coordenadas de un vector, matriz cambio de base de vectores y TCBV. Por otra parte, los estudios acerca del álgebra lineal del Grupo RUMEC no ofrecen una DG para el TCBV. Las preguntas de nuestra investigación son las siguientes: ¿Cuáles son las construcciones y mecanismos mentales que pone en juego un estudiante universitario en la construcción del TCBV? ¿Qué dificultades evidencian los estudiantes universitarios en el aprendizaje de este teorema? Con el propósito de responder a las preguntas, formulamos el siguiente objetivo: poner en evidencia las estructuras mentales que subyacen a las estrategias de los estudiantes universitarios para aprender tópicos del álgebra lineal. Particularmente, nos interesa identificar, describir y analizar las construcciones mentales y los mecanismos que estudiantes universitarios muestran para aprehender el TCBV.

En lo que sigue, reportaremos las evidencias del proceso de investigación, al aplicar el cuestionario y el proceso de entrevistas a los estudiantes de nuestros tres casos de estudio.

BÚSQUEDA DE EVIDENCIAS EMPÍRICAS PARA LA DG

Se realizó una toma de datos con la intención de documentar las construcciones y los mecanismos mentales descritos en la DG, la cual consideró dos momentos. Primero se aplicó un cuestionario de ocho preguntas construidas a la luz de la DG y luego se indagaron en profundidad, a través de tres entrevistas semiestructuradas, ciertos aspectos de la DG que el análisis del cuestionario anterior no proporcionó.

Presentación y análisis del cuestionario

Realizamos un análisis en términos de construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la DG para cada pregunta del cuestionario, el cual fue discutido entre los investigadores y las discrepancias se negociaron hasta alcanzar un acuerdo que se presenta más adelante. Posteriormente se presenta el análisis de los datos.

Las preguntas fueron pensadas para provocar en el estudiante reflexión para responder a lo que allí se plantea; es justamente esa forma de respuesta la que permite tener evidencias contrastables con las estructuras mentales previstas en la DG.

Pregunta 1 del cuestionario

Determine explícitamente el vector $p(x) \in P_1[x]$*, sabiendo que sus coordenadas respecto a la base ordenada* $B = \{1 - 7x, -5 - 4x\}$ *son* $[p(x)]_B = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La pregunta 1 tiene por objetivo determinar si un estudiante interioriza la acción de pertenencia del vector específico como elemento de un espacio vectorial (que no es $\mathbb{R}^n$) en un proceso, al trabajar con el subespacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 1 e incluyendo al polinomio nulo. Se espera que esta situación lleve al estudiante a considerar la condición de pertenencia de un vector al espacio vectorial, en coordinación con el de base ordenada a través de la combinación lineal de vectores, lo que se manifiesta en la expresión: $p(x) = -6(1-7x) + 2(-5-4x)$, para obtener que $p(x) = 34x - 16 \in P_1(x)$

Pregunta 2 del cuestionario

En $\mathbb{R}^2$*, determine las coordenadas del vector* $(-3,2) \in \mathbb{R}^2$*, respecto a la base ordenada* $B = \{(-1,3),(0,2)\}$.

La intención de esta pregunta es mostrar cómo en $\mathbb{R}^2$ se está evidenciando la coordinación entre los procesos de base ordenada y pertenencia de un vector al espacio $\mathbb{R}^2$, para obtener el proceso coordenadas de un vector en la base *B*, a través de la combinación lineal:

$(-3,2)=\alpha(-1,3)+\beta(0,2)$ con $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$; que da lugar a un sistema de ecuaciones lineales, de donde se obtienen las coordenadas $\alpha=3$ y $\beta=\frac{-7}{2}$. Ahora, escribir las coordenadas resultantes de la combinación lineal $(-3,2)=3(-1,3)+\frac{-7}{2}(0,2)$ como una matriz $\left([(-3,2)]_\beta=\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{-7}{2}\end{pmatrix}\right)$ requiere que la construcción mental resultante de la coordinación anterior se encapsule en un objeto de coordenada específico, para realizar acciones sobre este, y poder construir más tarde la matriz cambio de coordenadas.

Pregunta 3 del cuestionario

Sea $U \leq M_2(\mathbb{R})$ y $B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}$ una base ordenada de U. Determine (si es posible) las coordenadas del vector $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3\end{pmatrix}$ en la base B. Justifique su respuesta.

La pregunta 3 tiene por objetivo mostrar cómo en un espacio vectorial diferente a $\mathbb{R}^n$, un estudiante precisa coordinar a través de la combinación lineal de vectores el proceso de base ordenada *B* con el proceso pertenencia de un vector de espacio vectorial $U \leq M_2(\mathbb{R})$, en un nuevo proceso que le permita identificar a partir de la base *B* de *U* los escalares reales α y β que hacen posible la escritura única de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3\end{pmatrix}$ en términos de $\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$ Esta combinación lineal da origen a las ecuaciones lineales α + β =2, β = 1 y α + β = 3, cuyo sistema no tiene solución. Se interpreta que no es posible determinar las coordenadas del vector $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3\end{pmatrix}$ en la base solicitada porque dicho vector no pertenece a $U \leq M_2(\mathbb{R})$.

El hecho de realizar acciones sobre vectores que pertenecen a diferentes espacios vectoriales (polinomios, $\mathbb{R}^n$ y matrices en las preguntas 1, 2 y 3) sustenta en el estudiante acciones sobre distintos tipos de vectores y bases ordenadas, que más tarde se pueden interiorizar en procesos generalizables.

Pregunta 4 del cuestionario

En $\mathbb{R}^2$, determine (si es posible) las coordenadas del vector (a, b) ∈ $\mathbb{R}^2$, respecto a la base ordenada β = {(–1,3), (0,2)}.

La pregunta 4 da cuenta de la coordinación entre las construcciones mentales proceso del concepto pertenencia de un vector cualquiera a un espacio y del proceso base de un espacio vectorial. La coordinación se lleva a cabo mediante la combinación lineal de un vector expresado en forma general como *(a,b)*, en términos de la base β. El proceso resultante son las coordenadas del vector (a, b) ∈$\mathbb{R}^2$, en la base β.

El objetivo de esta pregunta es alejar al estudiante del cálculo numérico específico que es un paso a la generalización (Proceso (I)) de las coordenadas de un vector cualquiera de un espacio, en una determinada base, necesaria para la construcción del TCBV.

Para determinar las coordenadas se escribe el vector *(a,b)* como combinación lineal de la base β, esto es: (a, b) = α(–1,3) + β(0,2), con α, β ∈ $\mathbb{R}$; de donde se obtienen las coordenadas

$\alpha = -a$ y $\beta = \dfrac{b+3a}{2}$. Ahora, escribir estas coordenadas como una matriz $\left(\left[(a,b)\right]_\beta = \begin{pmatrix} -a \\ \dfrac{b+3a}{2} \end{pmatrix} \right)$ requiere que la construcción mental resultante de la coordinación anterior se encapsule en un objeto de coordenada general, para realizar acciones sobre este, y construir más tarde la matriz cambio de coordenadas.

Nuestra hipótesis es que si un estudiante no ha construido el concepto coordenadas de un vector como objeto, tendrá dificultades para realizar acciones necesarias sobre este para construir la matriz de coordenadas.

Pregunta 5 del cuestionario

Sea $B=\{x,1-x\}$ *y* $B'=\{1+x,1\}$ *dos bases ordenadas de* $W \le P_2[x]$ *. Determine las coordenadas de los vectores de la base B en la base B'.*

En la pregunta 5, el proceso base ordenada *B* se coordina con el proceso coordenadas de un vector específico, en un nuevo proceso que se generaliza en el Proceso (I), que permite escribir todos los vectores de *B* como combinación lineal de los vectores de la base $B': x=\alpha_1(1+x)+\beta_1(1)$ y $1-x=\alpha_2(1+x)+\beta_2(1)$, para obtener las coordenadas de cada uno de los vectores de $B: \alpha_1=1,\ \beta_1=-1,\ \alpha_2=-1$ y $\beta_2=2$

Pregunta 6 del cuestionario

Sea $B=\{x,1-x\}$ *y* $B'=\{1+x,1\}$ *dos bases ordenadas de* $W \le P_2[x]$*. Determine la matriz de coordenadas (matriz cambio de base) de la base B a la base B'.*

El objetivo de esta pregunta es mostrar la construcción de la matriz de coordenadas como proceso. Desde la pregunta 5, el proceso que permitió construir las coordenadas de los vectores de la base *B* en *B'* se coordina con el de matriz para obtener un ordenamiento de los escalares de las combinaciones lineales, cuya resultante es un proceso que llamamos Proceso (I) y que se identifica como la matriz de coordenadas: $A=[Id]_B^{B'}=\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ [x]_{B'} & [1-x]_{B'} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Pregunta 7 del cuestionario

Consideremos $B=\{(1,1),(1,0)\}$, $B'=\{v_1,v_2\}$ *dos bases ordenadas en* $\mathbb{R}^2$ *y* $P=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *la matriz de coordenadas (cambio de base) de B a B'. Determine explícitamente los vectores de la base B'.*

En la pregunta 7, el proceso de matriz de coordenadas *P* se coordina con las coordenadas de un vector $[(1,1)]_B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $[(1,0)]_B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mediante el producto matricial para calcular $[Id]_B^{B'}[v]_B$, obteniendo: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. La necesidad de comparar los procesos permite que se encapsulen en objetos, los cuales pueden desencapsularse y los procesos resultantes se coordinan en un nuevo proceso, que permite considerar a $[Id]_B^{B'}[v]_B=[v]_{B'}$ como resultado de aplicar una función, esto es, $f(x)=y$ para $f=[Id]_B^{B'}$,

$[v]_B$ e $y=[v]_{B'}$ que es el proceso TCBV. Como respuesta esperada, un estudiante determina las coordenadas de cada vector de la base B aplicando la igualdad anterior: $[(1,1)]_{B'}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ y $[(1,0)]_{B'}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, de donde se obtienen las ecuaciones $(1,1)=-v+0v_2$ y $(1,0)=2v_1+v_2$, cuya solución como sistema de ecuaciones lineales es $v_1=(-1,-1)$ y $v_2=(3,2)$.

Pregunta 8 del cuestionario

Sean B y B' dos bases de $U \leq M_{2\times 3}(\mathbb{R})$. *Dados* $P=\begin{pmatrix}1&3&-1&-1\\0&1&2&1\\0&0&1&4\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ *la matriz de coordenadas de B a B' y las coordenadas del* $[v]_B=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$, *determine las coordenadas de* $[v]_{B'}$. *Justifique.*

La intención de la pregunta 8 es mostrar evidencias de una construcción mental objeto del TCBV. La comparación de los procesos descritos en la pregunta 7 para determinar la igualdad $[Id]_B^{B'}[v]_B=[v]_{B'}$, permite que esos procesos se encapsulen en el objeto TCBV. Ahora la pregunta 8 enfrenta al estudiante a una situación donde la aplicación del TCBV sea la única forma de responder adecuadamente, esto es: desprenderse de los algoritmos propios que se han construido para trabajar el TCBV, cuando las bases de los espacios vectoriales son dadas.
La respuesta esperada es la aplicación directa del TCBV, es decir, $[Id]_B^{B'}[v]_B=[v]_{B'}$, por lo que

$$\begin{pmatrix}1&3&-1&-1\\0&1&2&1\\0&0&1&4\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\8\\-2\end{pmatrix}, \text{ así se tiene que } [v]_{B'}=\begin{pmatrix}-2\\1\\8\\-2\end{pmatrix}.$$

La tabla 2 resume la información respecto a las estructuras mentales que muestran los estudiantes representantes de los casos de estudio en el desarrollo del cuestionario.

Tabla 2.
Resumen de información relativa a estudiantes en tramos de la DG

Estudiantes / Preguntas	Caso 1		Caso 2		Caso 3
	E1	E2	E5	E6	E8
1. Construcción mental de pertenencia de un vector a un espacio vectorial	Proceso	Proceso	Proceso	Proceso	Proceso
2. Construcción mental de coordenadas de un vector en $\mathbb{R}^n$	Proceso	No responde	Acción	Proceso	Proceso
3. Construcción mental del concepto coordenadas de un vector en el espacio de las matrices	Objeto	No responde	Acción	Objeto	Objeto
4. Generalización de las coordenadas de un vector en $\mathbb{R}^n$	Proceso	No responde	Acción	Proceso	Proceso
5. Generalización del concepto coordenadas de un vector	Proceso	No responde	Acción	Proceso	Proceso
6. Construcción mental de la matriz de coordenadas	Proceso	No responde	Proceso	Proceso	Proceso
7. Construcción del TCBV como función	Proceso	No responde	Proceso	Proceso	Proceso
8. Construcción mental del concepto TCBV	Proceso	No responde	No responde	Objeto	Objeto

Fuente: resultados proyecto Fondecyt 1140801.

De la categorización en la tabla 2, podemos señalar que E6 y E8 muestran que los procesos previos al TCBV son encapsulados en el objeto TCBV. Sin embargo, E1 y E5, aunque muestran estructuras mentales previas construidas al TCBV, tienen dificultades para construir el objeto TCBV. Hemos seleccionado al estudiante E5 del caso 2 para mostrar en detalle este hecho, ya que los estructuras previas que E5 ha construido no le alcanzan para responder la pregunta 8 que precisa del TCBV como objeto.

Ejemplificación de resultados del cuestionario para un estudiante

En la pregunta 1 el estudiante E5 da evidencias de coordinar a través de la combinación lineal las construcciones mentales procesos de los conceptos de base B y de coordenadas de un vector $[p(x)]_B$. E5 hace uso de una pseudofila conformada con los vectores de dicha base y de la columna $[p(x)]_B$, lo que resuelve como un producto matricial entre ambos, obteniendo el vector $v=-16+34x$ (ver figura 5).

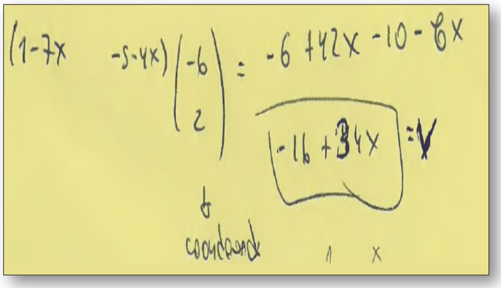

Fig. 5. Respuesta de E5 a la pregunta 1.

En la pregunta 2, E5 muestra que en $\mathbb{R}^2$ está coordinando a través de la combinación lineal de vectores los procesos de base ordenada y pertenencia de un vector en $\mathbb{R}^2$ para obtener: $(-3,2)=\alpha(-1,3)+\beta(0,2)$, con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; que da lugar a un sistema de ecuaciones lineales (ver figura 6), obteniendo $\alpha=3$ y $\beta=\frac{-7}{2}$. Sin embargo E5 no escribe las coordenadas como una matriz, sino como una 2-upla (ver figura 6), lo que muestra que la construcción mental resultante de la coordinación anterior no ha sido el proceso de coordenadas para $\mathbb{R}^2$, sino el proceso pertenencia de un vector en $\mathbb{R}^2$. Esta evidencia pone de manifiesto que E5 muestra una construcción acción del concepto coordenadas de un vector en $\mathbb{R}^n$.

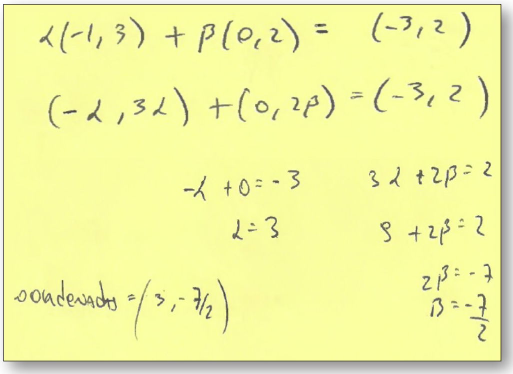

Fig. 6. Respuesta de E5 a la pregunta 2.

En la pregunta 3, E5 realiza los cálculos para la obtención de las coordenadas mediante la combinación lineal (ver figuras 7 y 8), y se da cuenta de que el vector no puede ser generado por la base *B*, es decir, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \notin U$. Sin embargo, no responde a lo que se le pregunta.

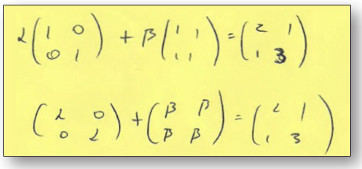

Fig. 7. Respuesta de E5 a la pregunta 3.

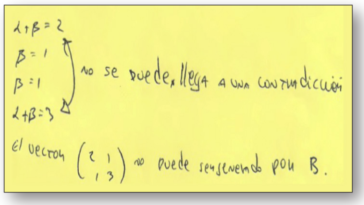

Fig. 8. Respuesta de E5 a la pregunta 3

En la pregunta 4, E5 calcula vía la combinación lineal de los vectores de la base *B*, las coordenadas de un vector cualquiera (ver figura 9). Las evidencias recabadas en las preguntas 2, 3 y 4 sobre la producción escrita de E5 ponen de manifiesto que E5 ha interiorizado en un proceso (a través de la combinación lineal de vectores) los conceptos de base ordenada de un espacio vectorial y el de pertenencia de un vector a un espacio vectorial, pero no los ha coordinado en un proceso que le permita identificar las coordenadas de un vector en una base, y representarlas de manera ordenada en una matriz (ver figuras 6, 8 y 9).

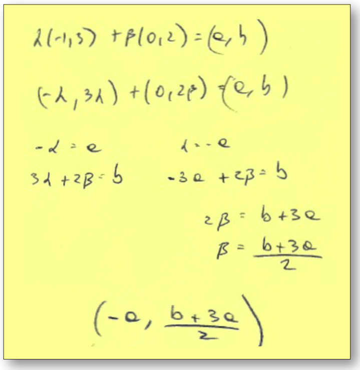

Fig. 9. Respuesta de E5 a la pregunta 4.

En la pregunta 5, E5 muestra una construcción mental acción para el concepto de matriz de coordenadas, pues ya no solo debe calcular las coordenadas de vectores específicos, sino las coordenadas de una base en términos de otra. Esto, interpretado desde la DG, implicaría coordinar el proceso base ordenada *B* con el de coordenadas de un vector específico en un nuevo proceso que se generaliza en el Proceso (I). Sin embargo, sus cálculos parciales no alcanzan para dar respuesta total a la pregunta (ver figura 10).

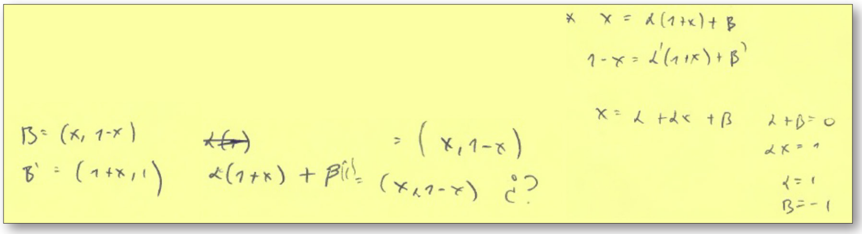

Fig. 10. Respuesta de E5 a la pregunta 5.

En la pregunta 6, E5 retoma los cálculos iniciados en la pregunta 5 y, a través de combinaciones lineales (ver figura 11), muestra una construcción proceso del concepto matriz de coordenadas.

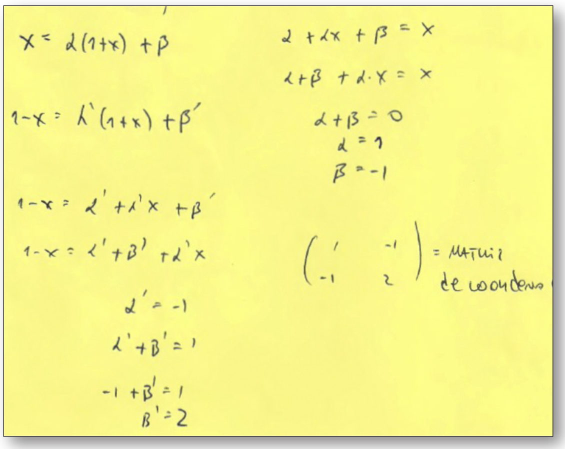

Fig. 11. Respuesta de E5 a la pregunta 6.

En la pregunta 7, E5 determina los vectores de la base solicitada, mostrando una construcción proceso del concepto matriz de coordenadas, pues revierte los procesos que construyen dicha matriz, es decir, utiliza el TCBV como una función cuando escribe las combinaciones lineales de los vectores (1,1) y (1,0) en términos de los vectores de la base B', como se muestra en la figura 12, para determinar explícitamente los vectores solicitados.

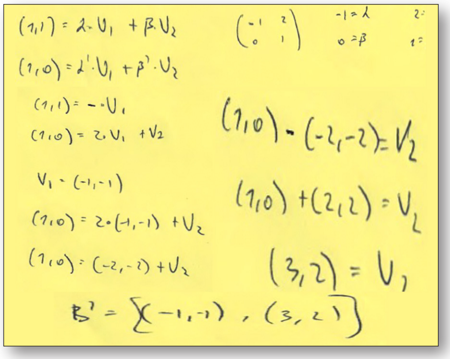

Fig. 12. Respuesta de E5 a la pregunta 7.

En la pregunta 8 del cuestionario que aborda la construcción objeto del TCBV, E5 no respondió, por lo que propicia una entrevista para indagar en profundidad lo que sucede.

Las evidencias recabadas en esta parte de la investigación mostraron que los temas de importancia para el aprendizaje del TCBV son los conceptos de coordenadas, combinación lineal, base ordenada y de matriz de coordenadas; por otra parte, es posible establecer que para E5 las estructuras mentales previas que ha mostrado en el concepto de coordenadas de un vector en una base no son suficientes para llegar a construir el TCBV como objeto.

Presentación y análisis de la entrevista

Mostramos episodios de la entrevista que se realizó a E5, en la que se profundiza en la estructura del concepto coordenada de vectores en una base. Se comenzó preguntando por qué se escriben así las coordenadas, $[v]_B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

> Entrevistador: ¿Te puedo hacer una consulta, por qué se escribe el vector v en corchete?
> E5: Ah, no sé.
> E5: Ahhhh, porque como está ahí así, de hecho…
> Entrevistador: ¿Por qué está ahí así?
> E5: Porque el vector a está en función de B, porque está el v, está en cambio de base para él o ¿no?, porque por ejemplo un vector v_1 ese es el vector v que se cambia de base a_1 o b_1, que se escribe ese en la combinación lineal de ese, de ese a ese, de ahí sale el cambiazo.
> E5: Qué significa, no lo sé.
> E5: Ah, el vector solo en el corchete, no sé.

Interpretamos que el estudiante está diciendo que $[v_1]_{Otra\ base} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ se escribe como una combinación lineal. Esta interpretación pone de manifiesto que E5 maneja las coordenadas de un vector en una determinada base, como una combinación lineal; E5 es impreciso en decir si son coordenadas o vectores; en sus argumentos muestra que está usando la combinación lineal como una herramienta de conversión que le permite determinar algo que se llama coordenadas, pero que no sabe rotular.

En relación con el TCBV, se puede decir que la falta de construcción de los procesos asociados a las acciones de rotular las coordenadas de los vectores en una matriz repercute en la imposibilidad de E5 de trabajar con dicho teorema. De acuerdo con la DG elaborada, es necesaria la construcción de dichos procesos de rotulación de las coordenadas de un vector y su generalización para poder hacerlo. Por otra parte, la concepción del concepto coordenada no es un obstáculo para construir la matriz de coordenadas. Pero sí dificulta la construcción de TCBV, como se reportó en el cuestionario –E5 no pudo dar una respuesta adecuada a la pregunta 8–. En la entrevista E5 aborda esa misma pregunta 8 pero con un argumento diferente. Desarrolla un ejemplo particular en un espacio vectorial que es conocido para él $-\mathbb{R}^2-$, donde construye una matriz de coordenadas a partir de dos bases que escribe como: $B = \langle(1,2),(3,4)\rangle$ y $B' = \langle(2,1),(3,2)\rangle$, con el propósito de chequear el TCBV, considerando un vector específico que toma de prueba, (3,1). A continuación, E5 calcula con los elementos específicos de las bases *B* y *B*' la matriz cambio de base de *B* a *B*' y determina que las coordenadas del vector (3,1) en la base *B* son $[(3,1)]_B = \begin{pmatrix} \frac{-9}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$. Además, calcula las coordenadas del mismo vector pero en la base *B*', y obtiene: $[(3,1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, comprobando mediante una multiplicación de matrices (ver figura 13) el TCVB.

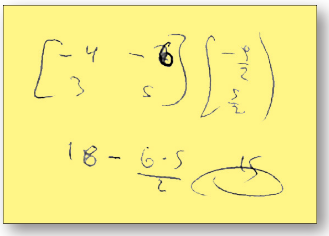

Fig. 13. Multiplicación de matrices para comprobar el TCBV.

E5 generaliza este procedimiento realizado en $\mathbb{R}^2$ aplicándolo a la pregunta 8 (ver figura 14).

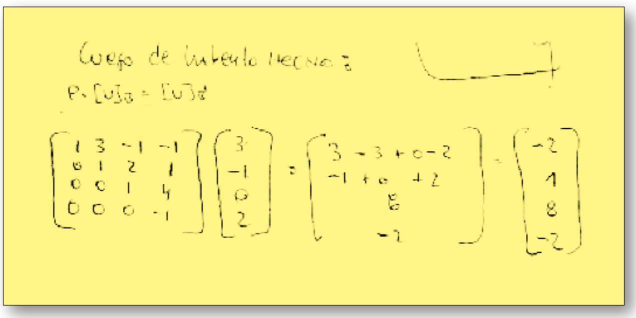

Fig. 14. Generalización a partir de su construcción en $\mathbb{R}^2$.

En su relato E5 declara:

Entrevistador: ¿Ahora cómo vas a utilizar esa información?
E5: Eso es lo que voy a ver. Estoy seguro que tiene que ser como, qué cosa puedo multiplicar, multiplicar eso por eso, no, ese por ese…
E5: No, no, tiene que ser ese multiplicado por ese, y por ese, vamos a ver qué pasa, menos… menos…, me va a quedar, ojalá me quede esto…
Entrevistador: ¿Qué estás tratando de hacer?
E5: Ahora, ya que tengo todos los datos de la primera parte, así como en el ejemplo inventado, quiero llegar de eso a eso, utilizando eso… (figura 13).
Entrevistador: Ya…
E5: Entonces, yo pensé que si multiplicaba la matriz, esa, la multiplicaba por esa (figura 14) juraba que iba a llegar a esa, y como no estaba seguro quería comprobarlo con los números… ¡pero no puedo!… Yo pensé que estaba bien, pero no, entonces no creo que sea así.

Para mostrar cómo trabaja con la matriz cambio base de vectores, E5 inventa un ejemplo en , precisando dos bases diferentes; posteriormente calcula en detalle la matriz cambio de base y las coordenadas de un vector en una de las bases, utilizando el TCBV para comprobar que la multiplicación de la matriz cambio de base por las coordenadas del vector en una base da como resultado las coordenadas del vector en la otra base. Una vez terminado el ejemplo, aborda el problema de la pregunta 8, haciendo una especie de generalización de su ejemplo, procediendo a multiplicar la matriz *P* (matriz de coordenadas de *B* a *B*') con las coordenadas del vector *v* en la base *B*; sin embargo, se percata de que no puede comprobar que esa multiplicación da las coordenadas del mismo vector pero en la otra base *B*'. El estatus del TCBV en E5 es de proceso porque E5 utiliza dicho teorema como una herramienta de comprobación, a diferencia de entenderlo como un instrumento que generaliza el cambio de coordenadas de una base a otra, sin importar el conocimiento explícito de los vectores de las bases, sino el conocimiento de una matriz que permita hacerlo.

CONCLUSIONES

De esta investigación se infieren las construcciones y mecanismos mentales que modelan el aprendizaje del TCBV. Entre ellos destaca la construcción del concepto coordenadas de un vector con respecto a una base como objeto y la coordinación entre los procesos base ordenada y pertenencia de un vector al espacio para obtener como resultado el proceso coordenadas de un vector. Por otra parte, el análisis de los resultados da cuenta de que el estudiante E5 no logra construir el TCBV como objeto, ni las siguientes construcciones mentales así como los mecanismos asociados:

a) *La construcción objeto del concepto coordenada de un vector en una base*. Esta construcción no se ha evidenciado en E5. En sus argumentos, la coordinación resultante de los procesos de base ordenada y de pertenencia de un vector a un espacio vectorial da como resultado el proceso esperado de coordenada de un vector. La coordinación anterior –que se trata a través de una combinación lineal– se ha quedado en el proceso pertenencia de un vector al espacio vectorial, y por ello escribe las coordenadas de un vector como una n-upla –vector de $\mathbb{R}^n$ –.

b) *La construcción del concepto matriz de coordenadas en términos de los objetos coordenadas de vectores.* Las evidencias dan cuenta de las dificultades en la construcción de la matriz de coordenadas, en términos de las coordenadas de los vectores. El análisis de resultados para E5 muestra que la no construcción del concepto coordenadas de un vector en una determinada base como proceso imposibilita la construcción de la matriz de coordenadas en términos de los objetos coordenadas de vectores. Esta dificultad implica que no se ha construido la coordinación del proceso que permite escribir las coordenadas de los vectores de una base en términos de la otra, con el de matriz, para obtener un ordenamiento de los escalares, en una matriz que se identifica con la matriz de coordenadas.

Con respecto a los resultados sobre E5 en las construcciones *objeto del concepto coordenada de un vector en una base* y *construcción del concepto matriz de coordenadas en términos de los objetos coordenadas de vectores*, se observa la importancia de no haber logrado dar respuesta a la pregunta 8 del cuestionario, lo cual sugiere confusión al darse cuenta de que no puede abordar esta pregunta. Este hecho motivó a indagar por qué, tras haber mostrado una construcción del proceso de la matriz de coordenadas y del TCBV, no se llegaba a la encapsulación de este último proceso en el objeto TCBV.

c) *La construcción del concepto TCBV como objeto.* En la entrevista se observó que E5 no construye TCBV como objeto porque no mostró coordinar el proceso de comparación de los objetos $[Id]_B^{B'}[v]_B$ y $[v]_{B'}$ con el de función coordenada, indispensable para la encapsulación del TCBV. Los resultados de esta investigación muestran dificultades involucradas en esta construcción.

Se logró establecer que la dificultad de E5 radicaba en que su construcción mental proceso del TCBV no podría evolucionar a una construcción objeto del TCBV porque se utilizaba el teorema para comprobar ciertos cálculos, y no como herramienta para generar algo que se desea conocer a partir de lo que se dispone (función). E5 mostró en todos sus argumentos que alcanza una construcción mental proceso del TCBV, y sus conocimientos previos no son suficientes para ser encapsulados en el objeto TCBV. Por la evocación de las estructuras mentales en la entrevista con respecto a la pregunta 8, esto es un «*comprobador*»; E5 lo manifiesta cuando construye su ejemplo anclado al conocimiento de las bases.

Hasta aquí, podemos concluir que en el estudio del teorema, la construcción de la matriz de coordenadas como proceso, no garantiza en los aprendices la construcción de coordenadas de un vector como objeto. Para finalizar, declaramos –con base en el recorrido de la DG que se hace con E5– que el análisis de datos muestra que la DG diseñada da cuenta de las construcciones necesarias en el aprendizaje del TCBV. Por ello, proponemos esta DG a la comunidad interesada en el aprendizaje de estas temáticas como un posible modelo de enseñanza y aprendizaje del TCBV y también como un diseño de investigación para que se analicen y discutan las dificultades que subyacen en la construcción de temáticas del álgebra lineal.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el proyecto Fondecyt 1140801. Los autores agradecen la buena disposición a los participantes en la investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.
http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (eds.). *CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, 1-32.
http://dx.doi.org/10.1090/cbmath/006/01

Bagley, S., Rasmussen, C. y Zandieh, M. (2012). Inverse, composition, and identity: The case of function and linear transformation. En S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle y M. Oehrtman (eds.). *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 341-344. Portland, Oregon.

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (5), 557-578.
http://dx.doi.org/10.2307/749887

Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E. y Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups and subgroups. *Journal of Mathematical Behavior*, 16 (3), 187-239.
http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90028-6

Dorier, J. L. (1990). Continuous analysis of one year of science students' work, in linear algebra, in first year of french university. *Proceedings of the 14th Annual Meeting of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 35-42. Oaxtepec, México.

Dorier, J. L. y Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. En D. Holton, M. Artigue, U. Krichgraber, J. Hillel, M. Niss y A. Schoenfeld (eds.). *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*, 255-273. Dordrecht, Netherlands: Kluwer A.P.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, 95-123. Dordrecht: Kluwer A.P.

Dubinsky, E. y Lewin P. (1986). Reflective abstraction and mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 5 (1), 55-92.

Dubinsky, E. y Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld y J. Kaput (eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education IV*, 293-289. Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G. (1989*a*). Applying the principle of multiple embodiments in teaching linear algebra: aspects of familiarity and mode of representation. *School Science and Mathematics*, 89, 49-57.
http://dx.doi.org/10.1111/j.1949-8594.1989.tb11889.x

Harel, G. (1989*b*). Teaching in learning linear algebra. Difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1-2), 139-148.

Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector spaces theory. *ZDM*, 40, 265-276.
http://dx.doi.org/10.1007/s11858-008-0078-z

McDonald, M. A., Mathews, D. y Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. En E. Dubinsky, J. J. Kaput y A. H. Schoenfeld (eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education IV*, 8, 77-102. Providence, RI: American Mathematical Society.

Montiel, M. y Bhatti, U. (2010). Advanced mathematics online: assessing particularities in the online delivery of a second linear algebra course. *Online Journal of Distance Learning Administration*, XIII (II), University of West Georgia, Distance Education Center. Disponible en: <http://www.westga.edu/~distance/ojdla/summer132/montiel_bhatti132.html>

Moore, G. H. (1995). The axiomatization of linear algebra: 1875-1940. *Historia Mathematica*, 22, 262-303.
http://dx.doi.org/10.1006/hmat.1995.1025

Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS Theory. *Linear algebra and its applications*, 432 (8), 2112-2124. http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2009.06.034

Poole, D. (2006). *Álgebra lineal. Una introducción moderna.* México: Thomson.

Roa, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (1), 89-112.

Robinet, J. (1986). Esquisse d'une genèse des concepts d'algèbre linèaire. *Cahier de Didactique des Mathèmatiques*, 29 IREM de Paris VII.

Stake, R. E. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Barcelona: Labor.

Trigueros, M. y Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73 (1), 3-19. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2005). La Thèorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 157-176.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Arnon, I., Trigueros, M. y Dubinsky, E. (2002). *Learning linear algebra with ISETL*. Disponible en: http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf

Mental structures for modeling the learning of the change of basis theorem for vectors

Marcela Parraguez
Pontificia Universidad Católica del Valparaíso, Chile
marcela.parraguez@pucv.cl

Javier Lezama
Instituto Politécnico Nacional, México
jlezamaipn@gmail.com

Raúl Jiménez
Universidad Católica del Norte, Chile
rjimen@ucn.cl

In order to investigate learning problems of linear algebra, we propose to investigate, based on the APOS theory as a theoretical and methodological framework, determining processes in the change of basis theorem for vectors (CBVT). This theorem states that given two basisandof a finite dimensional vector space *V*, of dimension *n*, there a matrix, called basis change matrix, satisfyingfor any *v* in *V*. The CBVT allows to identify and construct different coordinates through specific basis change matrices of given vector spaces. The construction of these coordinates corresponds to the application of the basic concepts of linear algebra, to wit, the linear combination and dimension. The CBVT uses the coordinate vector concept, which is related to the concept of identity linear transformation, and is generalized in the associated matrix theorem of a linear transformation.

To make the theory operational as a framework research, the design of a predictive model was required, called genetic decomposition (GD). In the case of this research we are interested in the GD design, which describes the construction of knowledge included in the CBVT, in the context of a concept from linear algebra. APOS theory provides a research cycle with three components: theoretical analysis, design and instruments' applications, and analysis and data verification. This research cycle determined by those three components permits a detailed description of the students' mental structures. To achieve this, instruments were designed and applied (a questionnaire of eight questions and three semi-structured interviews), which identified the mentioned constructions in the hypothetical GD, so that the results would reflect the constructions whereby students can learn (cognitive construction) the CBVT.

The research questions were: Which are the mental constructs and mechanisms that a college student uses in the CBVT construction? Which difficulties do university students show in learning this theorem? In order to answer the questions, we aimed to highlight the mental structures underlying the strategies of university students to learn topics of linear algebra, identifying, describing, and analyzing the mental constructs and mechanisms that university students showed to learn the CBVT. For this, we worked with 10 undergraduate Mathematics and Pedagogy in Mathematics students from three universities. Data was collected in two stages in order to document the constructions and mental mechanisms described in the GD. First, a questionnaire of eight questions constructed in the light of the DG was applied; and then certain aspects of the GD were investigated in depth, with the help of three structured interviews, which the analysis of the previous questionnaire did not provide.

We inferred from this research the constructions and mental mechanisms that model the learning of the CBVT. The most important ones seem to be the concept of the coordinates of a vector with respect to a basis as an object, and the coordination between the processes ordered basis and belonging to a vector space, to obtain as a result the coordinates vector process. On the other hand, in the analysis of the results of a student who fails to construct the CBVT as an object, since he does not give evidence of the concept construction object coordinate of a vector in a basis, neither of the concept construction of the matrix of coordinates in terms of the objects' coordinates vector, thus failing to answer to question 8 of the questionnaire. This motivated us to investigate why, after showing a construction process of the matrix coordinate and CBVT, the encapsulation of the latter CBVT process in object was not reached.

We can conclude that in the study of the theorem, the construction of the coordinate matrix as a process does not guarantee the construction of coordinates of a vector as object in he apprentices. We propose the analyzed GD to the community interested in the learning of these subjects as a possible model of teaching and learning the CBVT and also as a research design to analyze and discuss the problems underlying the construction of different themes of linear algebra.